УДК 621.513

Порівняння ефективності критеріїв структурної ідентифікації за допомогою тестових випробувань

Степашко В.С., Єфіменко С.М.
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, 03680, Київ, проспект Академіка Глушкова, 40,
astrid@irtc.org.ua, syefim@ukr.net

Вступ

При розв'язані практичних задач моделювання часто виникає задача вибору ефективного для конкретного випадку критерію якості моделей з певної множини наявних критеріїв.

Досить часто застосовуваним для розв'язання такої задачі є метод статистичних випробувань з використання ЕОМ (див, наприклад, [1-10]).

Мета цієї роботи – за допомогою статистичного експерименту виконати тестування різних критеріїв якості моделей для визначення їх ефективності та вироблення рекомендацій щодо ефективного використання критеріїв при моделюванні за даними спостережень.

Загальна характеристика задачі структурної ідентифікації

Нехай маємо вибірку $W=[Xy]$, що містить n точок спостережень, які утворюють матрицю $X=\left\{x_{ij}, i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}\right\}$ і вектор $y=(y_1 \dots y_n)^T$, причому $n \geq m$. При цьому загальна постановка задачі структурно-параметричної ідентифікації, або, іншими словами, задачі побудови моделей за експериментальними даними, може бути зведена [11] до формування за даними вибірки деякої множини F моделей різної структури вигляду:

$$\hat{y}_f = f(X, \hat{\theta}_f) \tag{1}$$

та відшукання оптимальної моделі з умови мінімізації заданого критерію CR на цій множині:

$$f^* = \arg\min_{f \in F} CR(y, f(X, \hat{\theta}_f)), \tag{2}$$

причому оцінка параметрів у (1) для кожної моделі $f \in F$ є розв'язком ще однієї екстремальної задачі

$$\hat{\theta}_f = \arg\min_{f \in F} QR(y, X, \theta_f) \tag{3}$$

де s_f — складність моделі f, яка дорівнює числу ненульових компонентів у моделі (1), QR – критерій якості розв'язання задачі параметричної ідентифікації кожної частинної моделі, що генерується в задачі структурної ідентифікації.

Для повного формулювання цієї задачі в кожному конкретному випадку додатково необхідно встановити вид і обсяг початкової інформації (вибірку даних і апріорну інформацію), а також:

– вказати релевантний клас базисних функцій (операторів), з яких формуються структури моделей множини F;
– визначити доцільний спосіб генерації структур моделей у вибраному базисі;
– обрати адекватний метод оцінювання параметрів (критерій QR);
– задати ефективний критерій якості CR моделей $f \in F$, що генеруються, і метод його мінімізації.

Чотири вказаних елементи визначають собою довільний метод структурно-параметричної ідентифікації. В цій роботі основна увага приділяється методиці порівняльного аналізу різних критеріїв якості CR.

Критерії, що використовуються при виборі оптимальної моделі, можна розділити на три основні групи [12]:

- статистичні критерії, що базуються на обчисленні величини помилки моделі на одній і тій же частині вибірки, де й оцінюються параметри, та застосуванні апарату перевірки статистичних гіпотез;
- зовнішні критерії (застосовуються в МГУА) ґрунтуються на розбитті вибірки на дві й більше частин. На одній частині – „внутрішній” – здійснюється оцінювання параметрів, на іншій – „зовнішній” – визначається прогнозна здатність моделей. Застосовуються чотири групи критеріїв: точності, узгодженості, балансу і динамічні;
- критерії з явним штрафом за складність (зокрема, критерії Акаіке та Малоуза) до помилки моделі „додають” адитивні або мультиплікативні штрафні члени, які залежать від кількості точок у вибірці і від складності (числа параметрів) моделі [13, 14].

Екстремальні задачі (2) і (3) містять ряд невизначеностей, що притаманні задачі моделювання за даними спостережень і впливають на якість розв’язку. Зокрема, це рівень шуму та кількість точок вибірки даних, від яких принципово залежить результат розв’язання задачі, що аналізується. Такі залежності досліджуються в цій роботі за допомогою обчислювальних експериментів.

Методика проведення експерименту

Для визначення ефективності було проведено тестування критеріїв:

– фінальної помилки передбачення Акаіке [13]:

$$FPE(s) = \frac{n+s}{n-s} RSS(s) \tag{4}$$

де $RSS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ – залишкова сума квадратів, n – кількість точок, s – складність моделі, або кількість оцінюваних параметрів;

– критерію Маллоуза ([14], подано у формі [8]):

$$C_p(s) = RSS(s) + 2\hat{\sigma}^2 s, \tag{5}$$

де $\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS(m)}{(n-m)}$ – оцінка невідомої дисперсії шуму, m – кількість аргументів;

– критерію регулярності, що застосовується в МГУА:

$$Ar(s) = \left\| y_B - X_B \hat{\theta}_{As} \right\|^2, \tag{6}$$

де A і B – відповідно навчальна і перевірочна частини вибірки, $\hat{\theta}_{As}$ – оцінка параметрів моделі складності s за МНК на підвибірці A.

Експерименти проводились наступним чином: генерувалась матриця X розміром 12×8 (12 рівнянь з 8 невідомими) для системи умовних рівнянь $X\theta = y$ для експерименту 1, розміром 15×30 для експерименту 2 та розміром 7×50 для експерименту 3. Вектор y формувався як лінійна комбінація перших п'яти регресорів для експерименту 1 (тобто істинна модель мала вигляд $y=5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+x_5$), десяти регресорів для експерименту 2 (істинна модель $y=10x_1+9x_2+...+2x_9+x_{10}$) та семи регресорів для експерименту 3 (істинна модель $y=7x_1+6x_2+...+2x_6+x_7$) з додаванням шуму.

У класі вкладених структур виконувалася структурно-параметрична ідентифікація і визначалася складність моделі, яка відповідала мінімуму відповідного критерію та обчислювалося значення цього критерію. Результати, отримані для кількості повторів, що становила 500, усереднювалися.

Чисельні результати тестування

Експеримент 1.

На Рис. 1 показано залежність значення критерію Акаіке від складності моделі за різних значень дисперсії шуму. Якщо за відсутності шуму (нижня крива) мінімум критерію дає модель, що містить 5 істинних регресорів, то зі зростанням рівня шуму мінімум критерію зміщується у бік простішої моделі, яка містить чотири і менше з п'яти істинних регресорів.

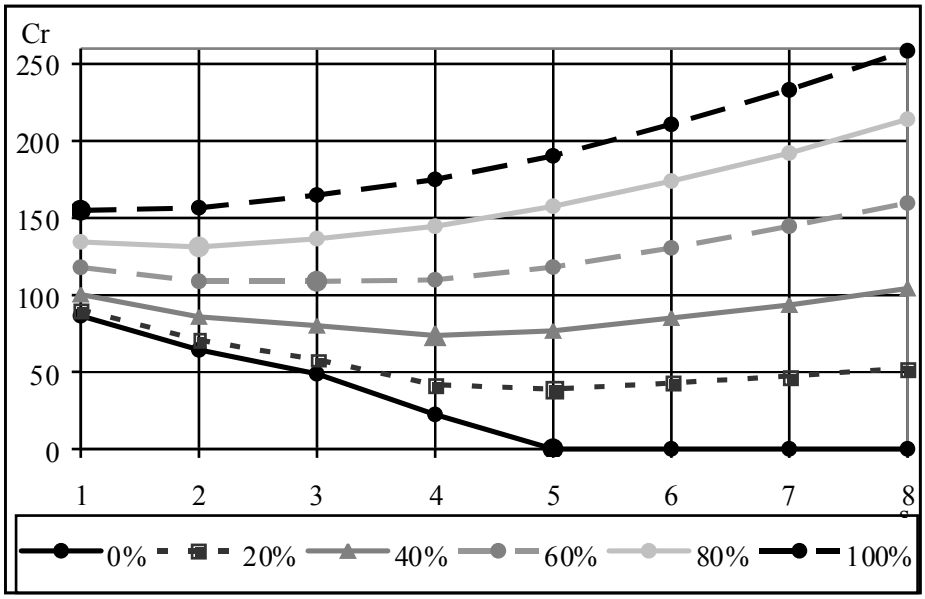

Рис. 1 Залежність значення критерію Акаіке від рівня шуму

На Рис. 2 подано залежність мінімальних значень критерію Акаіке від рівня шуму. Ці точки виділено на рисунку 1 (точки мінімуму кривих). На Рис. 3 показано, як змінюється складність оптимальної моделі *s** зі зростанням шуму. Так, наприклад, за рівня шуму, що становить 60% від рівня сигналу, оптимальною є модель, яка містить три перших аргументи з п'яти істинних.

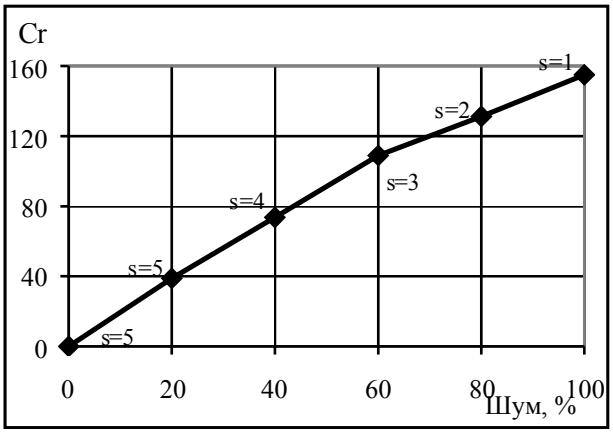

Рис. 2 Залежність мінімальних значень критерію Акаіке від рівня шуму

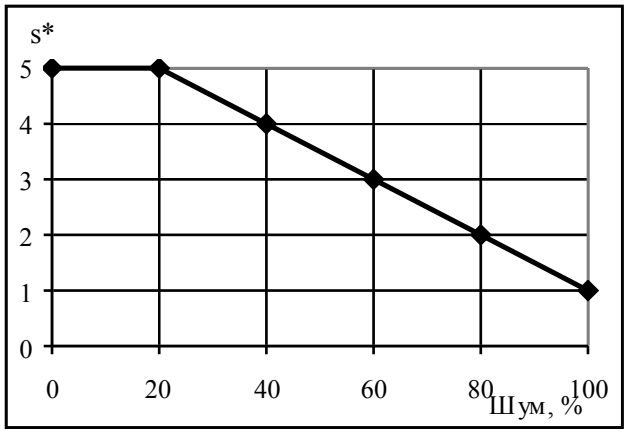

Рис. 3 Залежність складності оптимальної моделі від рівня шуму

<u>Експеримент 2.</u>

По вертикальній осі на Рис. 4 відкладено складність оптимальної моделі, отриманої за мінімумом відповідного критерію, по горизонтальній – значення дисперсії шуму. В цьому експерименті критерій Маллоуза виступає в якості оптимального критерію, тому що в обчислювальній формулі містить точне значення дисперсії шуму. Графік цього критерію показує, як має спрощуватись модель зі зростанням шуму. Згідно з результатами цього тестування, критерій регулярності можна вважати ефективним, оскільки він не переускладнює модель зі зростанням шуму. На відміну від нього, критерій Акаіке виявляється в цьому розумінні неефективним.

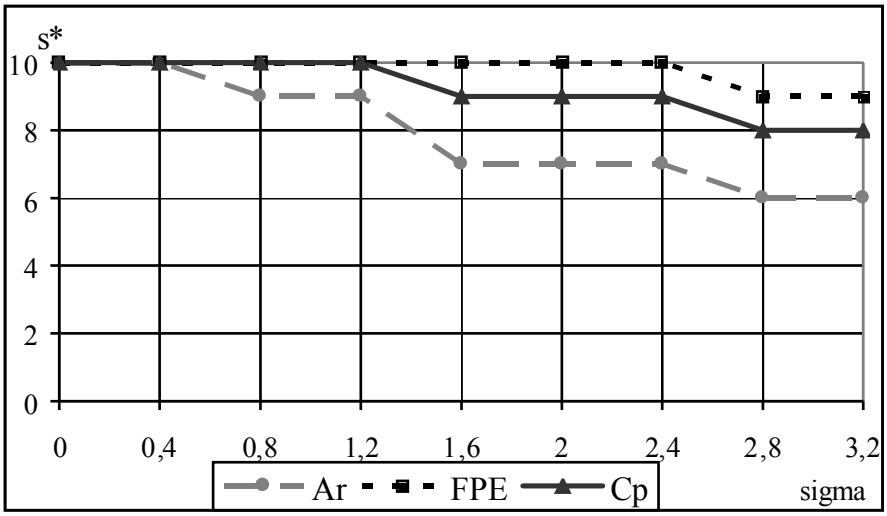

Рис. 4. Тестування критеріїв регулярності, Акаіке та Маллоуза

Експеримент 3.

В цьому експерименті ефективність оптимальних моделей, отриманих за критеріями регулярності та Маллоуза, порівнювалась за кількості точок від 10 до 40 та рівня шуму від 0 до 80%. Точність моделей визначалась за помилкою на незалежній контрольній вибірці з десяти точок за формулою

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \hat{y}_i(s^*))^2} \ , \qquad (5)$$

Таблиця 1. Порівняння оптимальних моделей за помилкою на контрольних точках

Рівень шуму, %	Число точок							
	10		20		30		40	
	C_p	AR	C_p	AR	C_p	AR	C_p	AR
0	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0012	0,0008	0,001
40	94,2	75,7	80,6	69,98	59,6	60,9	45,9	50,6
80	189,6	121,3	166,6	105,4	118,9	82,3	80,6	62,99

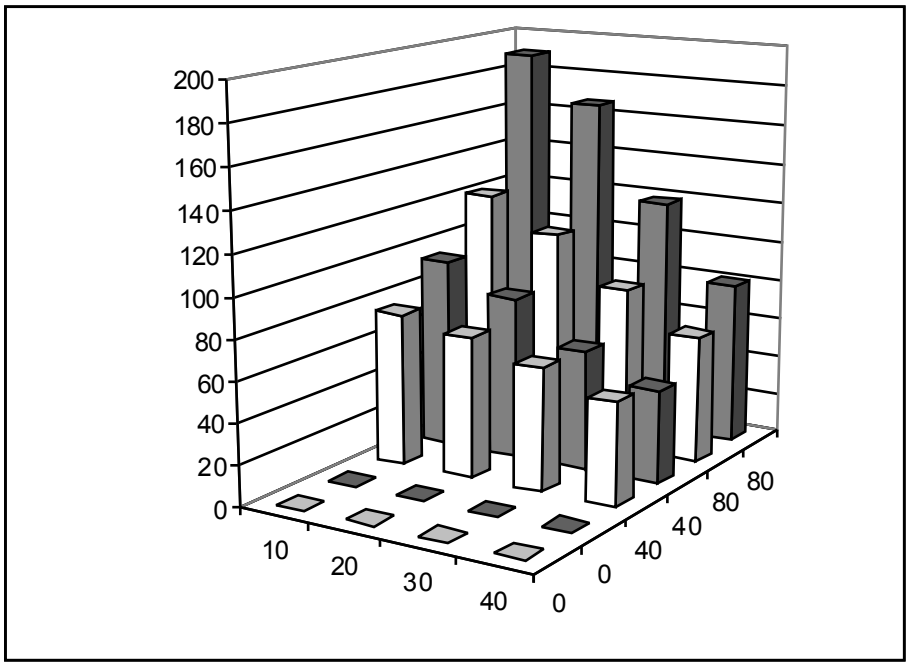

Рис. 5. Помилки оптимальних моделей, отриманих за критеріями регулярності та Маллоуза на контрольних точках

На Рис. 5 показано діаграму помилок на контрольних точках (вісь *Z*) при оцінюванні параметрів моделей за різної кількості точок (від 10 до 40, вісь *X*) за різного рівня шуму (від 0 % до 80%, вісь *Y*). Стовпчики світлого кольору відповідають значенням помилок моделей, отриманих за критерієм регулярності, темного – Маллоуза. Згідно з результатами, за малого рівня шуму і великої кількості точок оптимальні моделі, отримані за критерієм Маллоуза і регулярності, мають приблизно однакову точність. У разі зменшення кількості точок та підвищення рівня шуму критерій регулярності дає дедалі більш точні моделі.

Висновки

За допомогою статистичних експериментів показано, що критерії Акаіке і Маллоуза (за рахунок присутності явного штрафу за складність) та критерій регулярності (за рахунок розбиття вибірки даних на частини) у разі зростання рівня шуму спрощують моделі, які відбираються. При цьому критерій регулярності є ефективним, а критерій Акаіке таким вважати не можна, оскільки він обирає переускладнені моделі зі збільшенням дисперсії шуму. За умови наявності точної оцінки дисперсії (рівня) шуму критерій Маллоуза є оптимальним з точки зору теорії завадостійкого моделювання. Ці результати підтверджують теоретичні оцінки, отримані в [15].

За малого рівня шуму і значної кількості точок оптимальні моделі, отримані за критерієм Маллоуза і регулярності, мають приблизно однакову точність. У разі збільшення рівня невизначеності (невелика кількість точок і значний рівень шуму) більш точні моделі дає критерій регулярності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hocking R.R. Criteria for selection of a subset regression: which one should be used? // Technometrics. – 1972. – V.14. – P. 967-970.

2. Soderstrom T. On model structure testing in system identification // Int. J. Control. – 1977. – V.26. – № 1. – P. 1-18.

3. Логинов Э.А., Логинов В.Э. О выборе вида уравнения регрессии // Заводская лаборатория. – 1981. – № 1. – С. 87-91.

4. Ивахненко А.Г., Степашко В.С. Численное исследование помехоустойчивости многокритериальной селекции моделей. – Автоматика. – 1982. – № 4. – С.2 6-35.

5. Поиск зависимости и оценка погрешности / Под ред. И.Ш.Пинскера. – М.: Наука, 1985. – 148 с.

6. Herzberg A.M., Tsukanov A.V. The Monte-Carlo comparison of two criteria for the selection of models // J. Stat. Comput. and Simul. – 1985. – № 22. – P.113-126.

7. Михальский А.И. Выбор алгоритма оценивания по выборкам ограниченного объема // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 3. – С. 91-102.

8. Стадник М.П. Модификация критерия Мэллоуза-Акаике для подбора порядка регрессионной модели // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 4. – С. 98-108.

9. Иванченко В.Н., Лябах Н.Н., Гуда А.Н. Исследование свойств алгоритмов идентификации сложных процессов с помощью моделирования на ЭВМ // Автоматика. – 1992. – № 3. – С. 82-88.

10. Качала В.В. Сравнительный анализ алгоритмов структурной идентификации. – Труды Межд. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO’2000, Москва, ИПУ, 26-29 сентября 2000 г. – М.: ИПУ РАН. – 2000. – С. 133-143.

11. Степашко В.С. Алгоритмы МГУА как основа автоматизации процесса моделирования по экспериментальным данным // Автоматика. – 1988. – № 4. – С. 44-55.

12. Степашко В.С., Кочерга Ю.Л. Методы и критерии решения задач структурной идентификации // Там же. – 1985. – №5. – С. 29-37.

13. Akaike H. Fitting autoregressive model for prediction // Ann. Stat. – 1969. – V.21. – P. 243-247.

14. Mallows C.L. Some comments on Cp // Technometrics. – 1973. – V.15. – P. 661-667.

15. Степашко В.С. Анализ эффективности критериев структурной идентификации прогнозирующих моделей // Проблемы управления и информатики. – 1994. – № 3-4. – С. 13-21.