УДК 621.513

В.С. Степашко, С.Н. Ефименко

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: *моделирование по данным наблюдений, рекуррентное оценивание параметров, вложенные структуры, метод окаймления.*

Запропоновано модифікації методів Гауса та Грама-Шмідта для рекурентного обчислення параметрів послідовно ускладнюваних структур регресійних моделей при моделюванні за даними спостережень. Наведено результати порівняння часу виконання цих алгоритмів з рекурентним алгоритмом на основі відомого методу обрамлення.

The paper suggests modifications of Gauss and Gram-Schmidt methods for the recurrent parameter estimation of sequentially complicated structures of regression models for modelling from data. The results of run time comparison of these algorithms with a recurrent algorithm based on the known bordering method are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Оценивание параметров при моделировании по данным наблюдений, как известно, сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений. Наиболее распространенными и численно достаточно устойчивыми методами решения систем линейных уравнений являются метод последовательного исключения Гаусса и метод ортогонализации Грамма-Шмидта. Причем метод Грамма-Шмидта является более точным, но требует большего количества операций за счет ортогонализации матрицы плана. При однократном решении систем уравнений указанные методы практически равноправны по времени выполнения, однако при многократном применении, например, при структурной идентификации в классе вложенных структур или в случае применения метода включения, очевидными становятся преимущества рекуррентных методов оценивания, в частности, метода наименьших квадратов с окаймлением (МНКО) [1, 2]. Исследования показывают, что в таком случае преимуществом рекуррентного метода является уменьшение на порядок времени выполнения алгоритма. Неэффективность нерекуррентных методов объясняется необходимостью каждый раз при добавлении нового регрессора вычислять заново расширенную матрицу нормальной системы (в методе Гаусса) или ортогонализировать новую матрицу плана (в методе Грамма-Шмидта). Привлекательной является идея построения рекуррентных методов, в основе которых лежат отмеченные алгоритмы, однако которые устраняли бы указанные “недостатки” нерекуррентных методов (позволяли уменьшить время выполнения вычислений).

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ГРАММА-ШМИДТА ДЛЯ РЕКУРРЕНТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Алгоритмы обычной и модифицированной ортогонализации Грамма-Шмидта с выбором ведущего вектора приведены, например, в [3].

Пусть имеем систему n условных уравнений с m неизвестными:

$$Xa = y\,. \tag{1}$$

Считаем, что на шаге s-1 мы получили систему векторов v_i, i=1, 2 ., s-1 (столбцов матрицы V, полученной путем ортогонализации матрицы X). На s-м шаге по рекуррентной процедуре получаем вектор v_s :

$$v_s^0 = x_s - \sum_{j=1}^{s-1}(x_s^T v_j)v_j \qquad v_s = \frac{v_s^0}{\left\|v_s^0\right\|}\,. \tag{2}$$

После этого вычисляем оценку коэффициентов новой системы (с учётом s-го аргумента):

$$a_i = \frac{y^T v_i - \sum_{j=i+1}^{m} (v_i^T x_j) a_j}{v_i^T x_i}, \quad i = s, s-1, \ldots, 1. \tag{3}$$

Достаточно очевидная модификация алгоритма заключается в том, что на s-м шаге при добавлении к модели нового аргумента (то есть при решении системы уравнений, которая содержит s аргументов) мы не ортогонализируем снова матрицу X_s, а используем уже ортогонализированную матрицу V_{s-1} для получения вектора v_s.

Проанализировав формулы (2)-(3), можно предложить для оптимизации вычислений значения

$$v_i^T x_j, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = i, i+1, \ldots, m \tag{4}$$

записывать в некоторую треугольную матрицу размером $m \times m$ и использовать повторно при ортогонализации и вычислении параметров, а не вычислять отдельно для формулы (2) и формулы (3). Также повторно можно использовать значения

$$y^T v_i, \quad i = s, s-1, \ldots, 1, \quad s = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

записанные в некоторый вектор, размером $1 \times m$. Указанные предложения дают возможность существенно ускорить вычисление коэффициентов моделей. При этом несущественно увеличиваются затраты оперативной памяти ЭВМ.

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ГАУССА ДЛЯ РЕКУРРЕНТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Вероятно, самым распространенным и наиболее исследованным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, который основывается на последовательном исключении неизвестных и имеет много различных вычислительных схем [4]. Модификация, предложенная в этой статье, заключается в следующем.

От системы (1) переходим к соответствующей ей нормальной системе

$$Ha = g \tag{6}$$

с элементами матрицы $H = X^T X = \{H_{ij}, \quad i, j = \overline{1, m}\}$ и $g = X^T y = \{g_i, \quad i = \overline{1, m}\}$.

Пусть на (s-1)-м шаге мы исключили из системы (6) (s-1)-й аргумент. Вычислительные формулы на s-м шаге будут иметь следующий вид. Для прямого хода:

$$H_{is}^1 = \frac{H_{is}^0 - \sum_{j=1}^{i-1} H_{ij}^1 H_{js}^1}{H_{ii}^1}, \quad i = \overline{1, s-1} \tag{7}$$

$$H_{si}^1 = H_{si}^0 - \sum_{j=1}^{i-1} H_{sj}^1 H_{ji}^1, \quad i = \overline{1, s}, \quad g_s^1 = \frac{g_s^0 - \sum_{i=1}^{s-1} H_{si}^1 g_i^1}{H_{ss}^1}. \tag{8}$$

Для обратного хода:

$$a_i^s = g_i^s - \sum_{j=i+1}^{s} H_{ij}^s a_j^s, \quad i = \overline{s, 1}. \tag{9}$$

Особенностью предложенной модификации является то, что информация, необходимая для включения следующего аргумента, сохраняется в той же матрице H нормальной системы, следовательно, метод не нуждается в использовании дополнительной оперативной памяти ЭВМ.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для установления эффективности предложенных алгоритмов было осуществлено сравнение времени выполнения структурно-параметрической идентификации в классе вложенных

структур, то есть оценивание параметров для постепенно усложняемых структур, которые содержат сначала один аргумент, потом два, и так до полного включения всех аргументов. Таким образом, каждая следующая структура включает предыдущую. Сравнивались между собой представленные рекуррентные методы оценивания параметров с нерекуррентными.

Сравнение выполнялось следующим образом: генерировались матрицы плана X размером 20×200 (200 уравнений с 20 неизвестными), 40×200 ..., 180×200, после чего выполнялась структурная идентификация в классе вложенных структур для каждого случая. Результаты экспериментов представлены на рисунках 1 и 2.

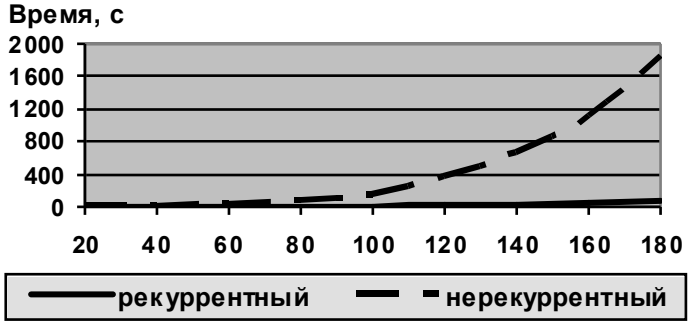

Рис. 1. Зависимость времени выполнения структурно-параметрической идентификации в классе вложенных структур от числа регрессоров для рекуррентного и нерекуррентного методов Грамма-Шмидта

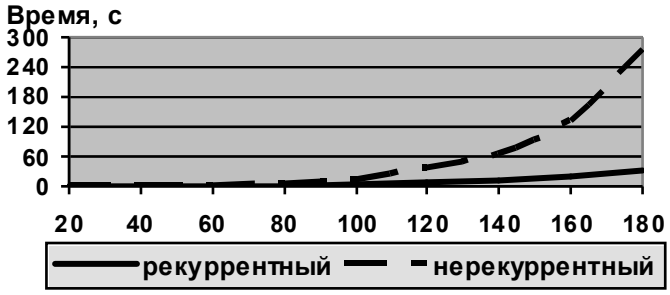

Рис. 2. Зависимость времени выполнения структурно-параметрической идентификации в классе вложенных структур от числа регрессоров для рекуррентного и нерекуррентного методов Гаусса

Кроме того, было выполнено сравнение при моделировании в классе вложенных структур двух предложенных модификаций с МНКО, как наиболее известным методом рекуррентного оценивания параметров. Матрица плана содержала 1000 точек. Результаты представлены на рисунке 3.

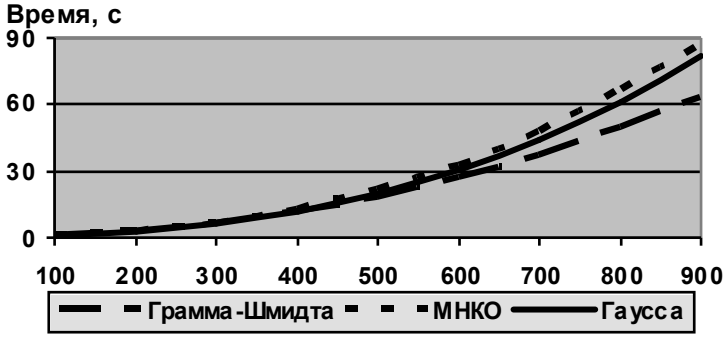

Рис. 3. Зависимость времени выполнения структурно-параметрической идентификации в классе вложенных структур от числа регрессоров для трёх рекуррентных методов

Другим известным способом генерации структур является метод включения, при котором на (s+1)–м шаге в модель (которая содержит s аргументов) включается тот аргумент (из m-s возможных), который больше всего минимизирует критерий. На рисунке 4 представлены результаты экспериментов для метода включения. Матрица плана содержала

200 точек. В качестве критерия использовался *Final Prediction Error* (финальная ошибка прогнозирования) [5]:

$$FPE = \frac{n+s}{n-s} RSS(s). \tag{10}$$

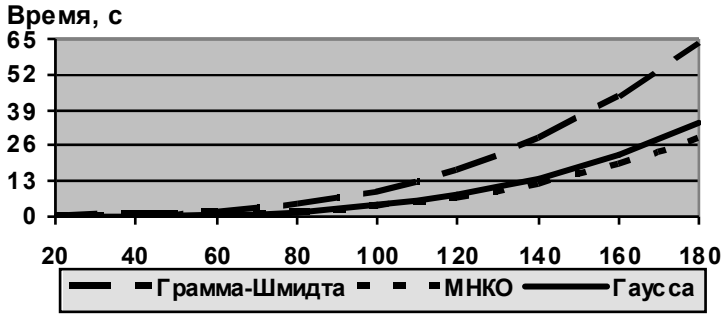

Рис. 4. Зависимость времени выполнения структурно-параметрической идентификации с применением метода включения от числа регрессоров для трех рекуррентных методов

ВЫВОДЫ

Результаты проведенных экспериментов свидетельствуют о том, что время выполнения структурно-параметрической идентификации в классе вложенных структур на порядок меньше для разработанных рекуррентных методов оценивания параметров в сравнении с соответствующими нерекуррентными методами (рисунки 1 и 2). Как следует из рисунка 3, предложенные методы несколько медленнее в сравнении с МНКО, хотя рекуррентный метод Гаусса по времени выполнения приближается к МНКО. Кроме того, согласно результатам проведенных экспериментов, рекуррентные модифицированные методы дают такую же точность полученных результатов, как и соответствующие им не модифицированные, то есть при их применении не наблюдается накопление ошибки. Таким образом, учитывая численную устойчивость предложенных рекуррентных методов, их использование для последовательного оценивания параметров при моделировании по данным наблюдений является целесообразным и эффективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гергей Й. Обращение матриц и решение систем линейных уравнений методом окаймления. – Журнал вычислительной математики и мат. физики.– 1980.– т. 19.– № 4.– С. 803–810.
2. Stepashko V. S., Yefimenko S. M. On the Effectiveness of Recurrent Methods of Parameter Estimation in Macromodeling Problems//Proceedings of V International Workshop "Computational Problems of Electrical Engineering", Jazleevets, Ukraine, August 26-29, 2003, pp.106-107.
3. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.- 264с.
4. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е.-М.-Л.: Физматгиз, 1963.
5. Степашко В.С. Структурная идентификация прогнозирующих моделей в условиях планируемого эксперимента // Автоматика.- 1992. – № 1.- с.26-35.