

УДК 519.876.5

МЕТОД ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАКРОМОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ІНТЕРВАЛЬНОГО РІЗНИЦЕВОГО ОПЕРАТОРА ІЗ РОЗДІЛЕННЯМ ВИБІРКИ ДАНИХ

Дивак Т.М.

*Тернопільський національний економічний університет
dtaras80@mail.ru*

В статті розглянуто проблему параметричної ідентифікації нелінійного інтервального різницевого оператора. Запропоновано і апробовано алгоритм, що базується на використанні основної та перевірконої вибірки для знаходження параметрів оператора.

Ключові слова: Параметрична ідентифікація, різницевий оператор, інтервал.

The paper considers the problem of parametric identification of nonlinear difference operator with interval data. Proposed and justified algorithm for solving this problem using part experimental data and validating model with all experimental data.

Keywords: parametrical identification, differential operator, interval.

В статье рассмотрена проблема параметрической идентификации нелинейного интервального разностного оператора. Предложен и апробирован алгоритм, базирующийся на использовании основной и проверочной выборки для нахождения параметров оператора.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, разностный оператор, интервал.

Вступ. Процеси забруднення атмосфери вихлопними газами автотранспорту є надзвичайно великою проблемою великих та середніх міст. Тому дослідження цих процесів з метою мінімізації впливу шкідливих викидів автотранспорту на довкілля є надзвичайно актуальною задачею. Одним із найбільш дієвих інструментів таких досліджень є математичне моделювання вказаних процесів.

Найчастіше задача моделювання динаміки процесів забруднення атмосфери шкідливими викидами розглядається як задача математичної фізики, коли вказані процеси описують диференціальними рівняннями в частинних похідних (параболічного типу) [9]. Далі, для знаходження розв'язку диференціальних рівнянь, які описують динаміку концентрації шкідливих речовин в просторі використовують чисельні методи, попередньо апроксимували диференціальні рівняння різницевиими схемами, наприклад за схемою Кранка-Ніколсона. Такий підхід має ряд недоліків. По-перше для побудови вихідного рівняння із відповідними початковими умовами необхідно мати параметри усіх джерел викидів, такі як інтенсивність, що не реально для такого розподіленого в просторі та часі джерела як автотранспорт. Крім цього необхідно мати детальні дані про метео умови та можливі на даний момент різноманітні атмосферні явища. По-друге такий підхід не дає можливості в повній мірі використовувати дані експериментальних досліджень процесів забруднення атмосфери у контрольованих точках міста, які проводяться

наявними вимірювальними засобами санітарно-епідеміологічних станцій (СЕС). Особливою проблемою вказаного підходу є проблема дискретизації вихідної моделі.

За цих умов, для розв'язування задачі моделювання динаміки процесів забруднення атмосфери шкідливими викидами автотранспорту найбільш обґрунтованим є застосування макромоделювання у вигляді різницевого оператора [1]. Враховуючи, що ідентифікація різницевого оператора проводиться із використанням експериментальних даних, то точність отриманої макромоделі буде залежати не тільки від методичних похибок, але й від похибок в експериментальних даних, які у багатьох випадках разом із похибками заокруглень є визначальними. Зокрема, для експериментального дослідження динаміки концентрацій шкідливих викидів використовують спектроаналізатори хімічних речовин, які відзначаються достатньо високими похибками, до 30%, тобто є визначальними при моделюванні. Це засвідчує ще один вагомий аргумент стосовно переваги макромоделювання процесів поширення забруднень атмосфери по відношенню до застосування моделей математичної фізики, оскільки природно виникає запитання: для чого робити спроби для урахування усіх фізичних явищ для точного відтворення динаміки процесів забруднення, тобто підвищувати точність математичної моделі, якщо її перевірити неможливо на не точних експериментальних даних?

В цих випадках доцільно розглядати похибки в експериментальних даних обмеженими за амплітудою, а самі дані представляти в інтервальному вигляді [3]. Такий підхід до макромоделювання розглянуто у працях ряду авторів [3-5]. Інтервальна форма представлення експериментальних даних в задачах параметричної ідентифікації різницевого оператора із заданою точністю, в межах інтервальних похибок експериментальних даних, вимагає застосування такого критерію узгодження експериментальних та модельованих даних, який забезпечує включення прогнозованих значень у відповідний інтервал експериментальних даних для заданих початкових умов. Такий критерій у подальшому називатимемо «критерій включення». Тоді задача параметричної ідентифікації різницевого оператора є задачею розв'язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР). Для знаходження розв'язків отриманої ІСНАР, створено метод та алгоритм [5], який ґрунтується на випадковому пошуку вектора параметрів різницевого оператора. Використання створеного методу для конкретних задач макромоделювання показало, що запропонований критерій є занадто жорстким і як результат алгоритми параметричної ідентифікації мають високу обчислювальну складність і низьку збіжність. Очевидно, що для більшості прикладних задач модель може мати нижчу точність, а ніж в межах точності отриманих експериментальних даних. Наприклад, при моделюванні процесів поширення шкідливих викидів, що забруднюють атмосферу, для задач екологічного моніторингу важливо, що б точність встановлення просторового та часового розподілу концентрації шкідливої речовини була достатньою для прийняття рішення: чи є

перевищення встановленої концентрації над граничнодопустимою? Тоді є зміст дещо знизити вимоги до точності моделі і тим самим зменшити обчислювальну складність реалізації методу параметричної ідентифікації різницевого оператора. З цією метою в даній статті пропонується, ґрунтуючись на ідеї О.Г. Івахненка, яка широко використовується в індуктивному моделюванні «про розбиття вибірки експериментальних даних на основну- для побудови моделі і перевірочну – для оцінки її точності», розділити вибірку інтервальних даних на дві частини. Першу – використати для побудови «критерію включення» і відповідної ІСНАР, яка буде простішою від загальної ІСНАР при використанні усїєї вибірки даних. Другу вибірку даних використати для уточнення знайденого на першій вибірці розв’язку ІСНАР, не вимагаючи для другої частини вибірки виконання «критерію включення».

Реалізація вказаної ідеї для побудови макромоделі у вигляді різницевого оператора на основі інтервальних даних є предметом даної праці.

1. Постановка задачі та особливості алгоритму параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора із розбиттям вибірки інтервальних даних

Розглянемо випадок, коли динаміки концентрацій шкідливої речовини у просторі можна описати макромоделлю у загальному вигляді такого різницевого оператора:

$$v_{i,j,h,k} = \vec{f}^T (v_{0,0,0,0}, \dots, v_{0,0,h-1,0}, v_{i-1,0,0,0}, \dots, v_{0,j-1,0,0}, \dots, v_{i-1,j-1,h-1,k-1}, \vec{u}_k) \cdot \vec{g},$$

$$i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J, h = 1, \dots, H, k = 1, \dots, K, \quad (1)$$

де $\vec{f}(\bullet)$ - вектор відомих нелінійних функцій, що задають структуру різницевого оператора; $v_{i,j,h,k}$ - істинне значення концентрації шкідливої речовини у точці з дискретними координатами i,j,h в k -й момент часу; \vec{g} - невідомий вектор (розмірністю $m \times 1$) параметрів різницевого оператора; \vec{u}_k - вектор управлінь в k -й момент часу.

Для оцінювання вектора параметрів \vec{g} різницевого оператора використовуємо результати спостережень за концентрацією шкідливої речовини для заданих дискретних значень координат i,j,h в k -й момент часу

$$\tilde{v}_{i,j,h,k} = v_{i,j,h,k} + e_{i,j,h,k}, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, J, h = 1, \dots, H, k = 1, \dots, K, \quad (2)$$

де $\tilde{v}_{i,j,h,k}$ - виміряне значення прогнозованої характеристики в точці простору з координатами i,j,h в k -й момент часу. У формулі (2) приймаємо: $e_{i,j,h,k}$ - випадкові обмежені за амплітудою похибки

$$|e_{1,j,h,k}| = |e_{i,1,h,k}| = |e_{i,j,1,k}| = \dots = |e_{i,j,h,k}| \leq \Delta_{i,j,h,k}, \Delta_{i,j,h,k} > 0 \quad \forall, i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, J, h=1, \dots, H, k=1, \dots, K, \quad (3)$$

які в загальному випадку залежать від координат простору та часу вимірювань.

Розділимо усю вибірку експериментальних даних на основну і перевірочну. Нехай, кількість спостережень у основній вибірці буде $N_0 \times J_0 \times H_0 \times K_0$, а у перевірочній, відповідно: $(N - N_0) \times (J - J_0) \times (H - H_0) \times (K - K_0)$.

Із використанням моделі спостережень (2) та із урахуванням обмеженості за амплітудою похибки (3), оцінки концентрації шкідливої речовини, отримані на основі експериментальних даних набувають інтервального представлення:

$$[z_{i,j,h,k}] = [z_{i,j,h,k}^-; z_{i,j,h,k}^+] = [(\tilde{v}_{i,j,h,k} - \Delta_{i,j,h,k}); (\tilde{v}_{i,j,h,k} + \Delta_{i,j,h,k})] \\ i=1, \dots, N, j=1, \dots, J, h=1, \dots, H, k=1, \dots, K, \quad (4)$$

де $[z_{i,j,h,k}^-; z_{i,j,h,k}^+]$ - гарантований інтервал, який включає істинне невідоме значення концентрації речовини.

Прогнозовані значення концентрацій шкідливих викидів на основі різницевого оператора зі структурою (1) отримаємо за таким виразом

$$[\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+] = \\ \vec{f}^T ([\hat{v}_{0,0,0,0}], \dots, [\hat{v}_{0,0,h-1,0}], [\hat{v}_{i-1,0,0,0}], \dots, [\hat{v}_{0,j-1,0,0}], \dots, [\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]) \cdot \hat{\vec{g}}, \\ j=1, \dots, J, h=1, \dots, H, k=1, \dots, K, \quad (5)$$

де

$[\hat{v}_{0,0,0,0}^-; \hat{v}_{0,0,0,0}^+] \subseteq [z_{0,0,0,0}^-; z_{0,0,0,0}^+], \dots, [\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}^-; \hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}^+] \subseteq [z_{i-1,j-1,h-1,k-1}^-; z_{i-1,j-1,h-1,k-1}^+]$ - задані у вигляді початкових умов інтервальні оцінки концентрацій шкідливих викидів; $\hat{\vec{g}}$ - вектор невідомих оцінок параметрів різницевого оператора.

Оскільки для отримання інтервалу прогнозованої характеристики $[\hat{v}_{i,j,h,k}]$ за формулою різницевого оператора (5) необхідно проводити обчислення за правилами інтервальної арифметики [6], то такий оператор називатимемо інтервальним різницевим оператором.

За цих умов, критерієм для отримання оцінок параметрів різницевого оператора будуть такі включення:

$$[\hat{v}_{i,j,h,k}^-] = [\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+] \subseteq [z_{i,j,h,k}] = [z_{i,j,h,k}^-; z_{i,j,h,k}^+], \quad i = 1, \dots, N_o, \\ j = 1, \dots, J_o, h = 1, \dots, H_o, k = 1, \dots, K_o \quad (6)$$

Підставляючи інтервальні оцінки $[\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+]$, $i = 0, \dots, N_o - 1$, $j = 1, \dots, J_o - 1, h = 1, \dots, H_o - 1, k = 1, \dots, K_o - 1$ задані у вигляді початкових умов та формулою (7) в умови (8), отримаємо таку інтервальну систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{v}_{0,0,0,0}^-; \hat{v}_{0,0,0,0}^+] \subseteq [z_{0,0,0,0}^-; z_{0,0,0,0}^+], \dots, \\ [\hat{v}_{i-2,j-2,h-2,k-2}^-; \hat{v}_{i-2,j-2,h-2,k-2}^+] \subseteq [z_{i-2,j-2,h-2,k-2}^-; z_{i-2,j-2,h-2,k-2}^+] \\ [\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}] = \vec{f}^T([\hat{v}_{0,0,0,0}], \dots, [\hat{v}_{0,0,h-1,0}], [\hat{v}_{i-1,0,0,0}], \dots, \\ [\hat{v}_{0,j-1,0,0}], \dots, [\hat{v}_{i-2,j-2,h-2,k-2}]) \cdot \hat{g} \\ z_{i,j,h,k}^- \leq f^T([\hat{v}_{0,0,0,0}], \dots, [\hat{v}_{0,0,h-1,0}], [\hat{v}_{i-1,0,0,0}], \dots, \\ [\hat{v}_{0,j-1,0,0}], \dots, [\hat{v}_{i-1,j-1,h-1,k-1}]) \cdot \hat{g} \leq z_{i,j,h,k}^+ \\ i = 2, \dots, N_o, j = 2, \dots, J_o, h = 2, \dots, H_o, k = 2, \dots, K_o \end{array} \right. \quad (7)$$

Отже задача ідентифікації параметрів інтервального різницевого оператора (5) за умов (6) є задачею розв'язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь у вигляді (7). Відомо [6], що розв'язками цієї системи є не опукла область. У праці [5] розглянуто алгоритм та метод розв'язування даної задачі, побудований на ітераційній схемі випадкового пошуку.

На перевіірочній частині вибірки результат параметричної ідентифікації (якість оцінок параметрів різницевого оператора) буде задовільним у випадку перетину відповідних прогнозованих інтервалів із експериментальними. Формально ці умови запишемо у такому вигляді:

$$[\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+] \cap [z_{i,j,h,k}^-; z_{i,j,h,k}^+] = \emptyset, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ \forall j = 1, \dots, J, \quad \forall h = 1, \dots, H, \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad (8)$$

де $[\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+]$ - інтервальні оцінки концентрацій речовини, отримані за формулою різницевого оператора (5).

Додатково до вказаних умов будемо використовувати умову щодо заданих прогностичних властивостей макромоделі у такому вигляді:

$$\max_{i=2,\dots,I, j=2,\dots,J, h=2,\dots,H, k=2,\dots,K} \left\{ \begin{array}{l} \text{wid}(\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+) - \\ \text{wid}(\hat{v}_{i,j,h,k}^-; \hat{v}_{i,j,h,k}^+) \cap [z_{i,j,h,k}^-; z_{i,j,h,k}^+] \end{array} \right\} \leq \varepsilon, \quad (9)$$

де $\text{wid}(\bullet)$ - операція виділення ширини інтервалу; ε - задана похибка прогнозування на основі макромоделі, $\varepsilon \geq \Delta_{i,j,h,k}$, $\forall i = I_0+1, \dots, N$, $\forall j = J_0+1, \dots, J$, $\forall h = H_0+1, \dots, H$, $\forall k = K_0+1, \dots, K$.

Слід зауважити, що вказані умови (9) завжди виконуються для основної вибірки даних, для якої побудовано ІСНАР (7).

Існуючі алгоритми, параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора ґрунтуються на пошуку хоча б одного розв’язку ІСНАР [5], в той час як існує не опукла область її розв’язків. Отже, якщо умови (8) сумісно із умовами (9) не виконуються для перевірконої вибірки, то слід шукати іншу оцінку параметрів різницевого оператора на не опуклій області розв’язків ІСНАР (7). В цьому і полягає основна суть модифікованого по відношенню до відомого [5] алгоритму параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора.

Слід зауважити, що процедура пошуку одного розв’язку ІСНАР (7) ґрунтуються на випадковому пошуку [5]. При цьому для кількісної оцінки якості поточного наближення до одного із розв’язків ІСНАР у вигляді вектора \hat{g} параметрів різницевого оператора, використовується показник δ . Цей показник визначає різницю центрів найбільш віддалених між собою прогнозованого та експериментального інтервалів – у випадку, коли вони не перетинаються та найменшою шириною перетину серед прогнозних та експериментальних інтервалів – для випадку їх перетину. Формально ці умови записують у такому вигляді [5]:

$$\delta = \max_{k=0\dots K, j=0\dots J, i=0\dots N, h=0\dots H} \left\{ \text{mid}(\hat{v}_{i,j,h,k}) - \text{mid}(z_{i,j,h,k}) \right\},$$

якщо $[\hat{v}_{i,j,h,k}] \cap [z_{i,j,h,k}] = \emptyset$,

(10)

$$\delta = \max_{k=0\dots K, j=0\dots J, i=0\dots N, h=0\dots H} \left\{ \begin{array}{l} \text{wid}(\hat{v}_{i,j,h,k}) - \\ \text{wid}(\hat{v}_{i,j,h,k}) \cap [z_{i,j,h,k}] \end{array} \right\},$$

якщо $[\hat{v}_{i,j,h,k}] \cap [z_{i,j,h,k}] \neq \emptyset$

(11)

де $mid(\bullet)$, $wid(\bullet)$ - операції визначення центру та ширини інтервалу, відповідно.

Якщо показник δ в процесі ітераційної процедури набуває нульового значення, то це означає що знайдена оцінка \hat{g} є розв'язком ІСНАР і може бути використана для побудови різницевого оператора.

2. Приклад розв'язування задачі параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора на основі модифікованого алгоритму

Метою даного дослідження є порівняння часової складності та збіжності базового обчислювального алгоритму параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора та модифікованого (із розбиттям вибірки) на конкретному прикладі, а також встановлення прогностичних властивостей макромоделей отриманих, цими алгоритмами. Дослідження обчислювальної складності для усіх нижче розглянутих випадків проводилися на персональному комп'ютері із такими характеристиками:

- Процесор – AMD Turion II Dual-Core Mobile M500 2.20 GHz
- Оперативна пам'ять – 2 гб
- Обсяг накопичувача на жорсткому диску – 250 гб
- Програмний код виконаний на мові C#

Розглянемо приклад параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора, що описує просторовий розподіл концентрації діоксиду азоту у центральній частині м. Тернополя [8].

Користуючись даними, наведеними у праці [8] побудуємо таблицю вихідних даних (таблицю 1).

Таблиця 1

Концентрації діоксиду азоту (NO_2) у центральній частині міста Тернополя, мг/дм^3

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.0150	0.0294	0.0421	0.0419	0.0324	0.0216	0.0200	0.0249	0.0200
1	0.0133	0.0448	0.0606	0.0598	0.0444	0.0242	0.0231	0.0453	0.0400
2	0.0200	0.0566	0.0778	0.0751	0.0603	0.0371	0.0323	0.0570	0.0619
3	0.0401	0.0755	0.0947	0.0919	0.0747	0.0540	0.0462	0.0671	0.0754
4	0.0601	0.0952	0.1075	0.1027	0.0847	0.0644	0.0584	0.0734	0.0806
5	0.0713	0.1076	0.1129	0.1032	0.0850	0.0654	0.0606	0.0736	0.0763
6	0.0682	0.1067	0.1068	0.0921	0.0729	0.0554	0.0515	0.0635	0.0643
7	0.0458	0.0870	0.0850	0.0675	0.0482	0.0334	0.0321	0.0437	0.0447
8	0.0750	0.0423	0.0730	0.0371	0.0255	0.0095	0.0124	0.0233	0.0250

У таблиці 1 i -дискретне значення координати x з кроком $\Delta x=275$ м; j -дискретне значення координати y із кроком $\Delta y=275$ м.

У праці [8] наведено процедуру структурної ідентифікації даної макромоделі і отримано за її допомогою таку формулу для різницевого оператора:

$$\begin{aligned} [\hat{v}_{i,j}^-; \hat{v}_{i,j}^+] = & g_1 + g_2 \cdot [\hat{v}_{i,j-1}^-; \hat{v}_{i,j-1}^+] + g_3 \cdot [\hat{v}_{i,j-2}^-; \hat{v}_{i,j-2}^+] + g_4 \cdot [\hat{v}_{i-1,j}^-; \hat{v}_{i-1,j}^+] \\ & + g_5 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-1}^-; \hat{v}_{i-1,j-1}^+] + g_6 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-2}^-; \hat{v}_{i-1,j-2}^+] + g_7 \cdot [\hat{v}_{i-2,j}^-; \hat{v}_{i-2,j}^+] \\ & + g_8 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-1}^-; \hat{v}_{i-2,j-1}^+] + g_9 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-2}^-; \hat{v}_{i-2,j-2}^+] \end{aligned} \quad (12)$$

де $v_{i,j}$ - концентрація діоксиду азоту в i,j точці простору.

Для дослідження обчислювальної складності алгоритму параметричної ідентифікації інтервального різниць опер на повній вибірці даних таблиці 1 та із розділенням вибірки на основну та перевіірочну проведемо чотири експерименти.

Експеримент 1. Параметрична ідентифікація інтервального різницевого оператора у вигляді (12) із застосуванням базового алгоритму [8] на повній вибірці таблиці 1 (47 інтервальних рівнянь ІСНАР) із інтервальною похибкою $\Delta=30\%$.

Провівши параметричну ідентифікацію за базовим алгоритмом [8] отримуємо різницевий оператор, який адекватно описує просторовий розподіл концентрацій діоксиду азоту:

$$\begin{aligned} [\hat{v}_{i,j}^-; \hat{v}_{i,j}^+] = & 0.512 + 1.047 \cdot [\hat{v}_{i,j-1}^-; \hat{v}_{i,j-1}^+] - 0.201 \cdot [\hat{v}_{i,j-2}^-; \hat{v}_{i,j-2}^+] \\ & + 0.338 \cdot [\hat{v}_{i-1,j}^-; \hat{v}_{i-1,j}^+] + 0.238 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-1}^-; \hat{v}_{i-1,j-1}^+] - 0.515 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-2}^-; \hat{v}_{i-1,j-2}^+] \\ & + 0.385 \cdot [\hat{v}_{i-2,j}^-; \hat{v}_{i-2,j}^+] - 0.851 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-1}^-; \hat{v}_{i-2,j-1}^+] + 0.447 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-2}^-; \hat{v}_{i-2,j-2}^+], \end{aligned}$$

Апроксимація поля концентрацій діоксиду азоту здійснена різницеvim оператором (12) із точністю не нижчою від похибки спостережень 30%. В процесі застосування базового алгоритму отримано його часову складність на ПК із характеристиками вказаними вище: 187.16 хв; а збіжність досягнуто за 21 954 945 ітерацій.

Тепер розглянемо аналогічну задачу для випадку застосування модифікованого алгоритму. Усю вибірку даних поділимо на дві частини до основної включимо дані, що задовільняють умовам: $i \geq 2 \& i < 8 \& j \geq 2 \& j < 8$. В таблиці 2. сірим кольором представлена основна вибірка даних, що використовується для знаходження параметрів моделі.

Таблиця 2

Основна вибірка даних

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.0150	0.0294	0.0421	0.0419	0.0324	0.0216	0.0200	0.0249	0.0200
1	0.0133	0.0448	0.0606	0.0598	0.0444	0.0242	0.0231	0.0453	0.0400
2	0.0200	0.0566	0.0778	0.0751	0.0603	0.0371	0.0323	0.0570	0.0619
3	0.0401	0.0755	0.0947	0.0919	0.0747	0.0540	0.0462	0.0671	0.0754
4	0.0601	0.0952	0.1075	0.1027	0.0847	0.0644	0.0584	0.0734	0.0806
5	0.0713	0.1076	0.1129	0.1032	0.0850	0.0654	0.0606	0.0736	0.0763
6	0.0682	0.1067	0.1068	0.0921	0.0729	0.0554	0.0515	0.0635	0.0643
7	0.0458	0.0870	0.0850	0.0675	0.0482	0.0334	0.0321	0.0437	0.0447
8	0.0750	0.0423	0.0730	0.0371	0.0255	0.0095	0.0124	0.0233	0.0250

Для знаходження параметрів моделі на основній вибірці, сформуємо ІСНАР із 13 інтервальних рівнянь, відповідно до кількості обраних експериментів на основній вибірці. ІСНАР також доповнимо початковими умовами, згідно виділеної області в таблиці 2.

Для дослідження ефективності модифікованого алгоритму із розділенням вибірки, проведемо три експерименти.

Експеримент 2. Точність моделі (ширина коридору) на основній вибірці задамо $\Delta=30\%$ (в межах реальних похибок в експериментальних даних), аналогічно як у експерименті 1 із використанням повної вибірки даних. В результаті застосування даного алгоритму, на основній вибірці знайдемо таку модель:

$$\begin{aligned}
 [\hat{v}_{i,j}^-; \hat{v}_{i,j}^+] &= 0.417 + 0.247 \cdot [\hat{v}_{i,j-1}^-; \hat{v}_{i,j-1}^+] + 1.301 \cdot [\hat{v}_{i,j-2}^-; \hat{v}_{i,j-2}^+] + \\
 &0.408 \cdot [\hat{v}_{i-1,j}^-; \hat{v}_{i-1,j}^+] - 0.029 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-1}^-; \hat{v}_{i-1,j-1}^+] - 0.529 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-2}^-; \hat{v}_{i-1,j-2}^+] \\
 &+ 0.018 \cdot [\hat{v}_{i-2,j}^-; \hat{v}_{i-2,j}^+] - 0.112 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-1}^-; \hat{v}_{i-2,j-1}^+] - 0.456 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-2}^-; \hat{v}_{i-2,j-2}^+]
 \end{aligned}$$

В результаті використання отриманої макромоделі на перевіірочній вибірці отримуємо, що її точність лежить в межах 30%, тобто аналогічно як і на основній вибірці. В той же час обчислювальна складність для даного випадку розділення вибірки суттєво нижча у порівнянні із випадком використання повної вибірки даних і складає 3.78 хв. Розв'язок задачі параметричної ідентифікації було досягнуто за 590 249 ітерацій.

Експеримент 3. Точність моделі на основній вибірці задамо $\Delta=25\%$. В результаті застосування даного алгоритму, на основній вибірці була знайдена така модель:

$$\begin{aligned}
[\hat{v}_{i,j}^-; \hat{v}_{i,j}^+] &= 0.531 + 0.313 \cdot [\hat{v}_{i,j-1}^-; \hat{v}_{i,j-1}^+] + 0.932 \cdot [\hat{v}_{i,j-2}^-; \hat{v}_{i,j-2}^+] \\
&+ 0.102 \cdot [\hat{v}_{i-1,j}^-; \hat{v}_{i-1,j}^+] + 0.144 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-1}^-; \hat{v}_{i-1,j-1}^+] - 1 + 0.254 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-2}^-; \hat{v}_{i-1,j-2}^+] \\
&- 0.181 \cdot [\hat{v}_{i-2,j}^-; \hat{v}_{i-2,j}^+] - 0.0005 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-1}^-; \hat{v}_{i-2,j-1}^+] - 0.220 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-2}^-; \hat{v}_{i-2,j-2}^+]
\end{aligned}$$

В результаті використання отриманої макромоделі на перевіірочній вибірці отримуємо, що її точність лежить в межах 31%. В той же час обчислювальна складність для даного випадку розділення вибірки складає 10.45 хв. Розв'язок задачі параметричної ідентифікації було досягнуто за 1 556 000 ітерацій.

Експеримент 4. Показник точності моделі на основній вибірці задамо $\Delta=20\%$. В результаті застосування даного алгоритму, на основній вибірці була знайдена така модель:

$$\begin{aligned}
[\hat{v}_{i,j}^-; \hat{v}_{i,j}^+] &= 0.580 + 0.304 \cdot [\hat{v}_{i,j-1}^-; \hat{v}_{i,j-1}^+] + 1.140 \cdot [\hat{v}_{i,j-2}^-; \hat{v}_{i,j-2}^+] + \\
&0.214 \cdot [\hat{v}_{i-1,j}^-; \hat{v}_{i-1,j}^+] - 0.051 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-1}^-; \hat{v}_{i-1,j-1}^+] - 0.410 \cdot [\hat{v}_{i-1,j-2}^-; \hat{v}_{i-1,j-2}^+] \\
&- 0.076 \cdot [\hat{v}_{i-2,j}^-; \hat{v}_{i-2,j}^+] + 0.016 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-1}^-; \hat{v}_{i-2,j-1}^+] - 0.312 \cdot [\hat{v}_{i-2,j-2}^-; \hat{v}_{i-2,j-2}^+]
\end{aligned}$$

В результаті використання отриманої макромоделі на перевіірочній вибірці отримуємо, що її точність лежить в межах 36%. В той же час обчислювальна складність для даного випадку розділення вибірки складає 12.32 хв. Розв'язок задачі параметричної ідентифікації було досягнуто за 1 859 526 ітерацій.

Результати проведених досліджень узагальнено на рис. 1. На рисунку наведено криві, що відображають зміну показника якості поточного наближення до розв'язку ІСНАР в залежності від кількості виконаних ітерацій, алгоритму випадкового пошуку. Зокрема: крива 1 означає зміну δ від кількості ітерацій для випадку використання повної вибірки даних, тобто із застосуванням ІСНАР (47 інтервальних рівнянь); крива 2 відображає зміну δ для експеримента 2; крива 3 відображає зміну δ для експеримента 3; крива 4 відображає зміну δ для експеримента 4.

Рис. 1 ілюструє, що для усіх випадків застосування повної вибірки та розділення вибірки на основну та перевіірочну вдається знайти оцінки параметрів різницевого оператора для заданої структури, оскільки у всіх обчислювальних процедурах отримано $\delta = 0$. Проте для пошуку оцінки параметрів різницевого оператора, найменша кількість ітерацій необхідна у випадку розділення вибірки на основну та перевіірочну при використанні на основній вибірці інтервальних даних в межах похибки вимірювань (експеримент 2).

На рис. 2 наведено діаграму, яка відображає часову складність реалізації методу для випадків: стовпчик 1 – використання повної вибірки даних (ІСНАР); стовпчик 2 для експеримента 2, стовпчик 3 для експеримента 3, стовпчик 4 для експеримента 4.

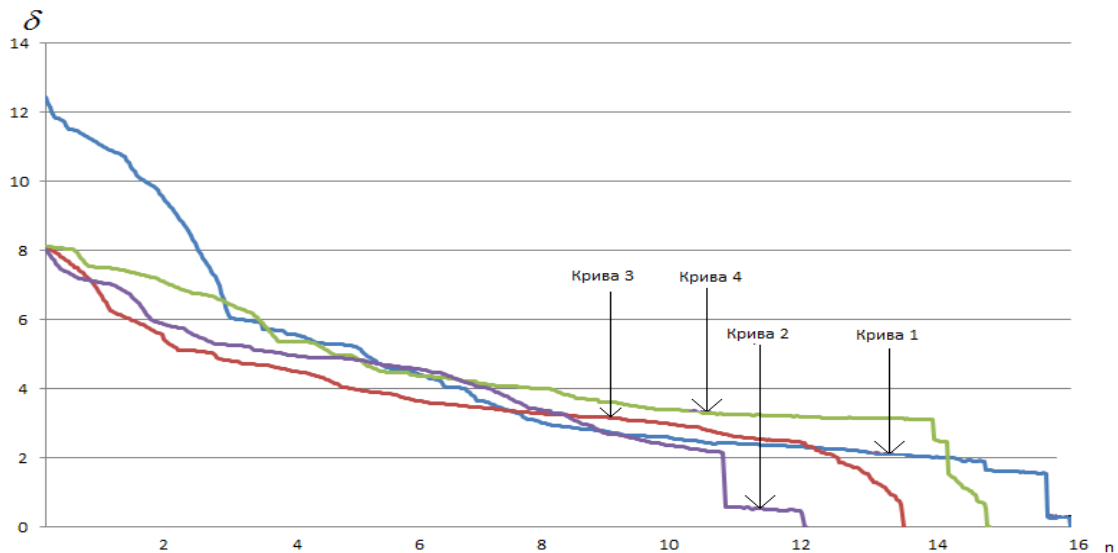


Рис. 1 Обчислювальна складність реалізацій методів що використовувалися в експериментах (n визначається, як \ln від кількості ітерацій)

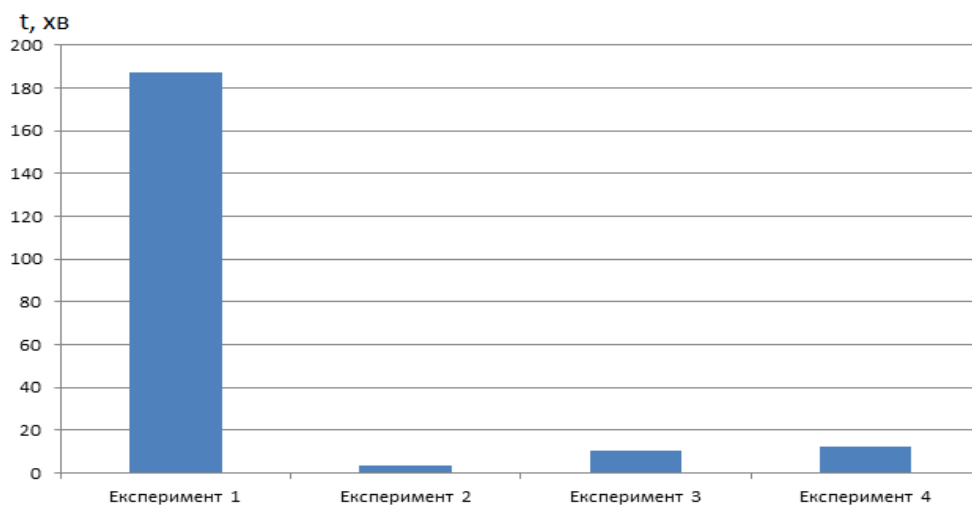


Рис. 2 Часова складність реалізацій методів що використовувалися в експериментах

Як видно із рис. 1 та 2 найнижча обчислювальна складність реалізації методу та найвища збіжність досягається у випадку розділення вибірки на основну та перевірючу. Крім того, із проведених досліджень можна зробити висновок, що уточнення моделі на основній вибірці призводить до зростання обчислювальної складності і в той же час не дає можливість підвищити її точність на перевірючій вибірці, тобто покращити її прогностичні властивості. Отже має сенс виключно процедура побудови моделі на основній вибірці в межах точності експериментальних даних, заданих в інтервальному вигляді та перевірка її прогностичних властивостей на перевірючій вибірці з метою забезпечення точності не вище аніж точність експериментальних даних.

Висновки. Розглянуто задачу параметричної ідентифікації різницевого оператора на основі аналізу інтервальних даних із розділенням вибірки даних на основну та перевірочну. В процесі розв'язування задачі отримано такі результати:

1. З метою зниження обчислювальної складності реалізації методу параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора доцільним є розділення усієї вибірки інтервальних даних на основну та перевірочну. На основній вибірці здійснюється параметрична ідентифікація шляхом розв'язування ІСНАР з меншою кількістю інтервальних рівнянь ніж в ІСНАР, що побудована на повній вибірці. На перевірочній вибірці оцінюються прогностичні властивості моделі.

2. На прикладі побудови макромоделі у вигляді різницевого оператора, що описує стаціонарне поле концентрацій діоксиду азоту, встановлено, що модифікація відомого методу параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора, що ґрунтується на методах випадкового пошуку розв'язків ІСНАР у напрямі розділення вибірки на основну та перевірочну забезпечує суттєве зниження обчислювальної складності (в 37 раз) реалізації методу і при цьому не погіршує прогностичних властивостей макромоделі.

Література

1. Ковальчук П.І. Моделювання і прогнозування стану навколишнього середовища: Навчальний посібник.- К.: Либідь, 2003. – 208 с.
2. Адмаев О.В. Моделирование оценки выбросов автотранспорта в Красноярске // Вестник красноярского государственного университета. Серия физико-математические науки. - 2005.-№4.- С.143-150.
3. Дивак М.П., Пукас А.В., Дивак Т.М. Ідентифікація параметрів різницевого оператора в задачах моделювання процесів поширення забруднень методами аналізу інтервальних даних // Зб. Наук. Праць ДонНТУ. Серія інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка.- 2009.- Вип..10(153)-С.224-229.
4. Дивак М., Стахів П., Каліщук І. Ідентифікація параметрів моделей “вхід-вихід” динамічних систем на основі інтервального підходу // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т.9. - №4. – с.109–117.
5. Дивак М.П., Марценюк Є.О., Войтюк І.Ф. Оптимальна процедура налаштування параметрів методу ідентифікації інтервальної дискретної моделі динамічної системи. //Відбір та обробка інформації.- 2008. – Вип 27 (103) - С.17-23.
6. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
7. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение // Дис. доктора физ. –математ. наук. - Новосибирск: Ин-т вычисл. Технологий СО РАН, 2000. - 322 с.
8. І. Ф. Войтюк, М. П. Дивак, А. В. Пукас Застосування інтервального різницевого оператора для апроксимації полів концентрацій шкідливих викидів автотранспорту// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - №1. – 2011.
9. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики. – Л. Видавництво Львівської політехніки 2010.